ТХОР @svyathor

1 **Опр** $\exists$ $E_2 = \{0, 1\}$ – мн-во состоящее из двух эл-ов. $E_2^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \forall i, \alpha_i \in E_2\}$

Всюду опр-ой булевой ф-цией наз отображение

$$f(x_1, \ldots, x_n) : E_2^n \to E_2$$

P_2 – мн-во всех булевых ф-ий

2 **Опр** Переменная x_i наз. существенной если $\exists$ такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in E_2$ что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \alpha_n)$

<u>иначе</u> фиктивная

3 **Опр** 2 ф-ии АЛ наз равными, если одну из них можно получить из другой путём <u>добавления и изъятия</u> $\forall$ числа <u>фиктивных переменных</u>

$x \vee y$ – дизъюнкция

$x \wedge y$ – конъюнкция

$x \oplus y$ – исключающее „или"

$x \to y$ – импликация

$x \sim y$ – эквивалентность

$x \downarrow y$ – стрелка Пирса $(\overline{A \vee B})$

$x \mid y$ – штрих Шеффера $(\overline{A \wedge B})$

4 **Опр** $\exists$ имеется нек число ф-ий

$$A = \{ f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_n(\dots) \}$$

Введем понятие ф-ла над A

1) $\forall$ ф-ия из A наз. формулой над A

2) Если $f_1(x_1, \dots, x_n) \in A$ и $H_1, \dots, H_n$ - либо переменная либо ф-ла над A, то выражение $f(H_1, H_2, \dots, H_n)$ явл также ф-ой над A

3) Только те ф-лы над A, которые можно построить с помощью п. 1) и 2)

5 **Опр** 2 ф-лы наз. эквивалентными, если реализуемые ими ф-ии равны.

6 **Опр** Определим ф-ию x в степени сигма так.

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, \text{ если } \sigma = 0 \end{cases}$$

$0^0 = 1^1 = 1$

$0^1 = 1^0 = 0$

7 **Опр** Литералом наз. переменную или отрицание переменной. Литералы x_i и $\bar{x}_i$ наз. противоположными

8 **Опр** Конъюнкцией наз. $\forall$ произведение неск-их литералов, не содержащее одинаковых или противоположных литералов. Отдельный литерал также считается конъюнкцией. Конъюнкции отличающиеся, только порядком литералов считаются одинаковыми

9 **Опр** Дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.) называется дизъюнкция нескольких различных конъюнкций.

10 **Опр** Конъюнкция K наз. импликантой ф-ии $f(x_1,\dots,x_n)$, если для $\forall$ набора $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$:

$$K(\tilde{\alpha})=1 \Rightarrow f(\tilde{\alpha})=1$$

11 **Опр** Конъюнкция K содержится в конъюнкции K_1 если $K=K_1$ или K можно получить из K_1 вычеркиванием некоторых литералов

12 **Опр** Конъюнкция K наз. простой импликантой ф-ии $f(x_1,\dots,x_n)$, если K - импликанта ф-ии $f(x_1,\dots,x_n)$ но при выбрасывании из K $\forall$ литерала полученная конъюнкция не явл. импликантой ф-ии $f(x_1,\dots,x_n)$

13 **Опр** Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \neq const$. Сокращенной Д.Н.Ф. ф-ии f наз. дизъюнкция всех её простых импликант

14 **Опр** Мн-во ф-ий АЛ A наз. полной системой (в P_2) если $\forall$ ф-ию АЛ можно выразить формулой над A

15 **Опр** Монотонной конъюнкцией от переменных $x_1,\dots,x_n$ наз. ф-ла 1, а также $\forall$ ф-ла вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_s}$, в которой $s \geq 1$, $1 \leq i_j \leq n$ для всех $j = \overline{1,s}$ и все переменные различны

16 **Опр** Полиномом Жегалкина над $x_1,\dots,x_n$ наз. ф-ла 0, а также $\forall$ ф-ла вида:

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_l$$

где $l \geq 1$ все K_j - различные монотонные конъюнкции над $x_1,\dots,x_n$

17 **Опр** Пусть $0 \leq i \leq 2^n - 1$ и в двоичном представлении числа i $(i = (i_1,\dots,i_n)_2)$ единицы стоят только на позициях с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$

Тогда через $K_i(x_1,\dots,x_n)$ будем обозначать конъюнкцию $x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \dots \cdot x_{j_k}$. Если $i=0$, то будем считать $K_0(x_1,\dots,x_n) \equiv 1$, **Пр** $K_5(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2 \cdot x_4$

18 **Опр** ∃ $A \subseteq P_2$. Тогда замыканием A (обозн. $[A]$) наз. мн-во всех ф-ий АЛ которые можно выразить над A

Св-ва 1) $[A] \supseteq A$

2) $A \supseteq B \Rightarrow [A] \supseteq [B]$

3) $[[A]] = [A]$

19 **Опр** ∃ $A \subseteq P_2$, если $[A] = A$ $\Rightarrow$ A — замкнутый класс

20 **Опр** Класс $T_0 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — ф-ии сохраняющие 0

21 **Опр** Класс $T_1 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ — ф-ии сохраняющие 1

22 **Опр** Ф-ия АЛ наз. линейной, если её можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n, \quad c_i \in \{0, 1\}$$

23 **Опр** ∃ $f(x_1, \dots, x_n)$ — ф-ия АЛ. Тогда ф-ей двойственной к f наз. ф-ия

$$f^*(x_1, \dots, x_n) := \overline{f}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$$

24 **Опр** Ф-ия АЛ наз. самодвойственной, если $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$

25 **Опр** $\exists$ даны 2 набора $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. Тогда считаем, что $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta} \Leftrightarrow \forall i\,(\alpha_i<\beta_i)$

26 **Опр** Ф-ия АЛ наз. монотонной, если для $\forall$ 2 сравнимых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ вып.:

$$\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$$

27 **Опр** Система ф-ий АЛ $A \subseteq P_2$ наз-ся базисом (в P_2), если

1) $[A] = P_2$
2) $\forall f \in A\,([A \setminus \{f\}] \ne P_2)$

28 **Опр** $\exists$ $A \subseteq P_2$. Мн-во A наз. предполным классом, если

1) $[A] \ne P_2$ (система A не полная)
2) $(\forall f \in P_2 \setminus A)([A \cup \{f\}] = P_2)$ при добавлении $\forall$ новой ф-ии система становится полной.

Лемма 1.1.1 (о числе слов)

В алфавите $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ из r букв можно построить ровно r^m различных слов длины m

Th 1.2.1 (о разложении ф-ии АЛ по переменным)

Для $\forall$ ф-ии АЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ и для $\forall$ k $(1 \le k \le n)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Следствие Разложение $\forall$ ф-ии АЛ по одной переменной имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, \dots, x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n)$$

Следствие (теорема о СДНФ)

Для $\forall$ ф-ии АЛ $f(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$, справедливо:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) : f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

Th 1.5.1 Система $A = \{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$ явл. полной

Лемма 1.5.1 Если система A - полная и $\forall$ ф-ия системы A может быть выражена формулой над нек другой системой B, то B тоже полная система

Th 1.5.2 След. системы – полные в P_2

1) $\{x \vee y, \bar{x}\}$ 2) $\{x \& y, \bar{x}\}$ 3) $\{x / y\}$ 4) $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$

Th 1.6.1 (теорема Жегалкина)

$\forall$ ф-ию АЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно ед. образом представить полиномом Жегалкина від. $x_1, \ldots, x_n$

Утверждение 1.8.1 $\exists$ A – замкнутый класс, $A \neq P_2$ и $B \subseteq A$. Тогда B – неполная система

Th 1.8.1 Класс T_0 – замкнут

Th 1.8.2 Класс T_1 – замкнут

Th 1.8.3 Класс L – замкнут

Утверждение 1.8.2

Для $\forall$ ф-ии АЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо рав-во

$$f^{**}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Th 1.9.1 (принцип двойственности)

$\exists$ $\varphi(y_1, \ldots, y_m) = f(f_1(y_{11}, \ldots, y_{1k_1}), \ldots, f_n(y_{n1}, \ldots, y_{nk_n}))$

$(y_1, \ldots, y_m$ это $y_{11}, \ldots, y_{1k_1}, \ldots, y_{n1}, \ldots, y_{nk_n})$

Тогда $\varphi^*(y_1, \ldots, y_m) = f^*(f_1^*(y_{11}, \ldots, y_{1k_1}), \ldots, f_n^*(y_{n1}, \ldots, y_{nk_n}))$

Следствие $\exists$ ф-ия $\varphi(y_1, \dots, y_m)$ реализуется формулой над $A = \{f_1, f_2, \dots\}$. Тогда если в этой формуле всюду заменить вхождения всех f_i на f_i^*, то получится формула реализующая $\varphi^*(y_1, \dots, y_m)$

Th 1.9.2 Класс S замкнут

Th 1.10.1 Класс M замкнут

Лемма 1.11.1 (о несамодвойственной ф-ии)

Из $\forall$ несамодвойственной ф-ии АЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ подставляя вместо всех переменных ф-ии x и $\overline{x}$ можно получить ф-ию $\varphi(x)$, которая явл. константой

Лемма 1.12.1 (о немонотонной ф-ии)

Из $\forall$ немонотонной ф-ии АЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ подставляя вместо всех переменных ф-ии $x, 0, 1$ можно получить ф-ию $\varphi(x) = \overline{x}$

Лемма 1.13.1 (о нелинейной ф-ии)

Из $\forall$ нелиней ф-ии АЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных ф-ии $x, \overline{x}, y, \overline{y}, 0, 1$ можно получить $\varphi(x, y) = x \cdot y$ или $\varphi(x, y) = \overline{x \cdot y}$

Th 1.14.1 (теорема Поста)

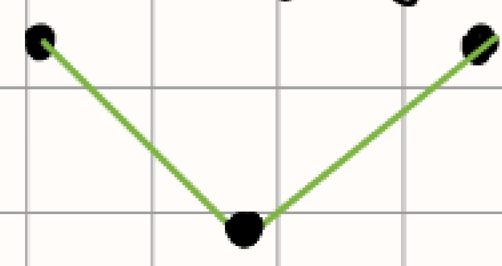
Система ф-ий АЛ $A = \{f_1, f_2, \ldots\}$ явл. полной в P_2 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ она не содержится целиком ни в одном из след. классов T_0, T_1, S, L, M

Th 1.15.1 Максимальное число ф-ий в базисе АЛ равно 4

Замечание $\{x|y\}$, $\{x \cdot y, \bar{x}\}$, $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$ - базис

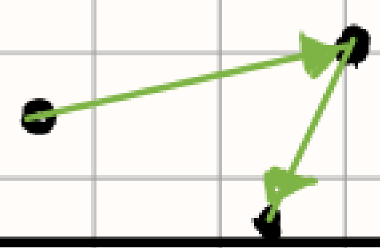
Th 1.16.1 В P_2 имеется ровно 5 предполных классов, а именно T_0, T_1, S, L, M

1 **Опр** ∃ задано: V - ∀ мн-во эл-ов и E - ∀ мн-во неупорядоченных пар эл-ов из V. Тогда говорят, что задан **граф** $G=(V,E)$ (**неориентированный граф**)

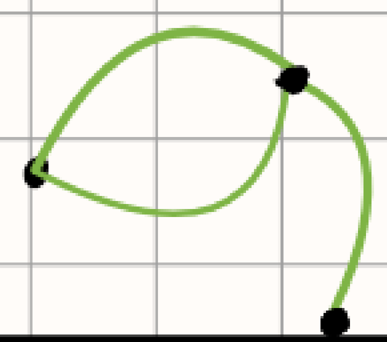


эл-ы V - **вершины** эл-ы E - **рёбра**

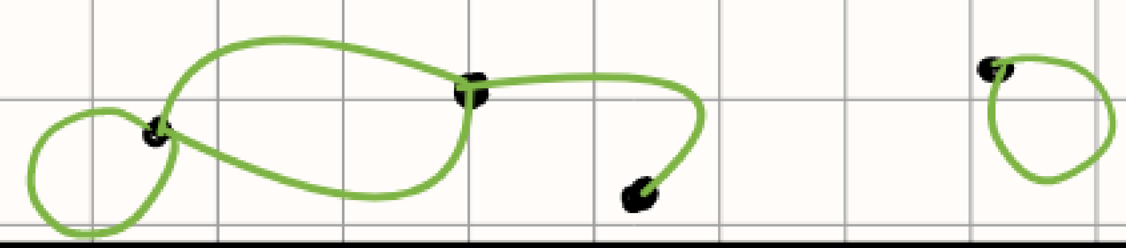
2 **Опр** Если в Опр1 пары в E расс-тся как упорядоченные, то говорят, что задан **ориентированный граф**, а пары наз. **дугами**



3 **Опр** Если разрешается, чтобы ∀ пара (a,b) встречалась в E несколько раз, то говорят, что задан **мультиграф**. При этом пары, встречающиеся несколько раз, наз. **кратными рёбрами (дугами)**



4 **Опр** Если в Опр3 разрешается, чтобы в E входили пары вида (a,a), то говорят что задан **псевдограф**. Такие пары наз. **петлями**



5 **Опр** 2 вершины графа наз. **смежными**, если они соединены ребром

6 **Опр** вершина и ребро **инцидентны**, если ребро содержит вершину

7 **Опр** Степенью вершины v графа (мультиграфа) наз. кол-во рёбер, инцидентных данной вершине. Степень вершины в псевдографе опр-ся аналогично, но каждая петля учитывается 2 жды. Вершина степени 0 наз изолированной (Обознач. $\deg v = \dots$)

8 **Опр** ∃ граф G имеет мн-во вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Тогда матрицей смежности этого графа наз матрицу $A = \|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = 1$, если вершины v_i и v_j смежны, и $a_{ij} = 0$ в противном случае

9 **Опр** 2 графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ наз. изоморфными, если ∃ взаимно однозначное отображение (изоморфизм) $\varphi : V_1 \to V_2$ такое, что

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$$

10 **Опр** Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ наз. подграфом графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$

11 **Опр** Путем в графе (псевдографе) $G = (V, E)$ наз-ся ∀ послед. вида: $v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), v_n$

n – длина пути, путь длины 0 состоит из 1 вершины

12 **Опр** Цепью наз-ся путь, в котором нет повторяющ. рёбер, простой цепью наз путь без повторения вершин

13 Опр. Путь в Опр. 11 наз. **замкнутым** если $v_0 = v_n$

14 Опр. Путь наз. **циклом**, если он замкнут, и ребра в нем не повторяются; **простым циклом**, если $v_0 = v_n$ и больше вершины не повторяются.

15 Опр. Граф $G = (V, E)$ наз. **связным**, если для любых вершин v_i, v_j из V $\exists$ путь из v_i в v_j

16 Опр. **Компоненты связности** – связные подграфы

17 Опр. **Деревом** наз. связный граф без циклов

19 Опр. Подграф $G_1 = (V_1, E_1)$ графа $G = (V, E)$, наз-ся **остовным деревом** в графе $G = (V, E)$, если $V_1 = V$ и $G_1 = (V_1, E_1)$ – дерево.

19 Опр. $\forall$ дерево, в котором выделена одна вершина называемая **корнем**, наз. **корневым деревом**

Опр (индуктивное)

1) Граф состоящий из 1 вершины, которая выделена, наз. **корневым деревом**

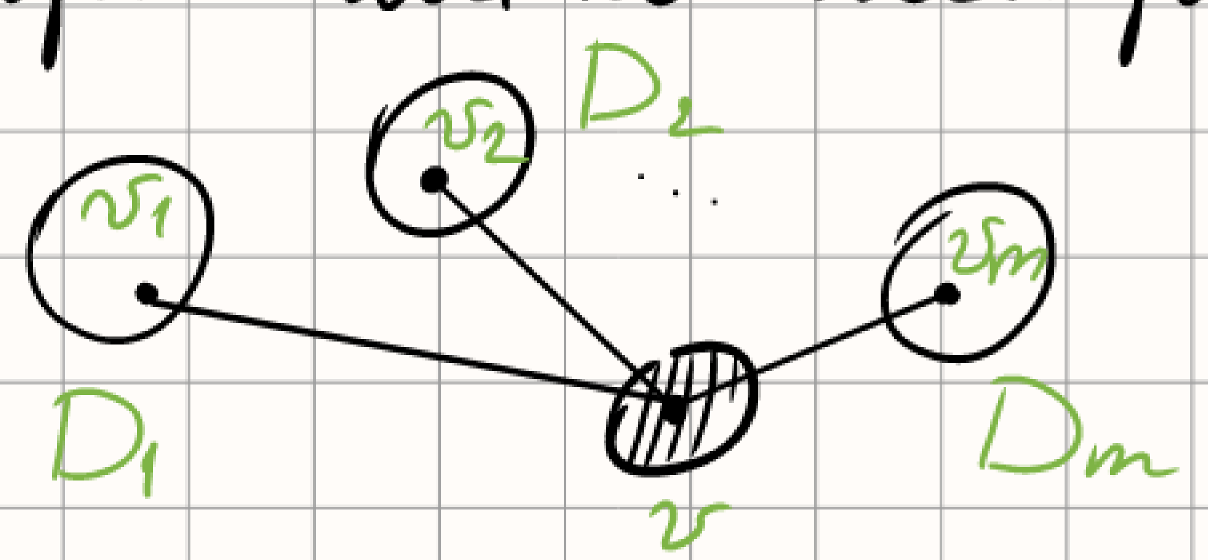
2) ∃ имеются корневые деревья $D_1, D_2, \dots, D_m$ с корнями $v_1, v_2, \dots, v_m$ и ∃ $D_i = (V_i, E_i)$, причем $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$. ∃ v – новая вершина. Тогда граф $D = (V, E)$ полученный следующим образом:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m \cup \{v\}$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m \cup \{(v, v_1), (v, v_2), \dots, (v, v_m)\}$$

и в котором выделена вершина v (корень), наз. **корневым деревом**.

3) **Корневые деревья** – только те объекты, которые можно построить по 1) и 2).



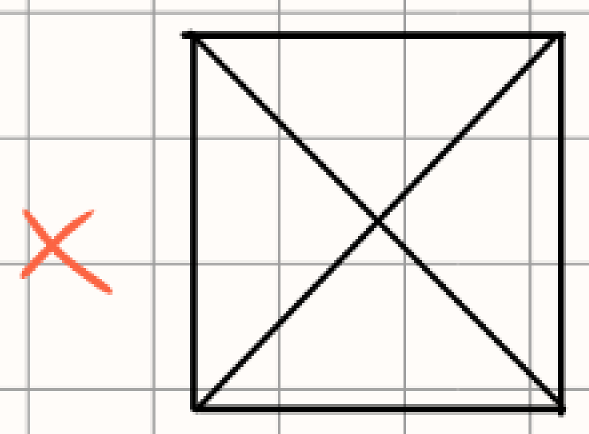
$D_1, \dots, D_m$ – **поддеревья** дерева D

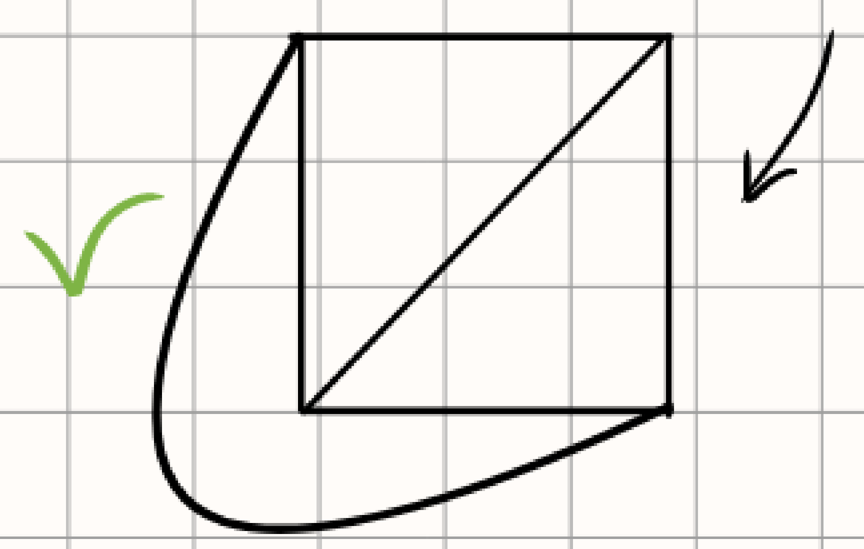
Опр **Упорядоченным корневым деревом** наз. корневое дерево, в котором

1) Задан порядок поддеревьев

2) Каждое поддерево D_i является упорядоченным поддеревом

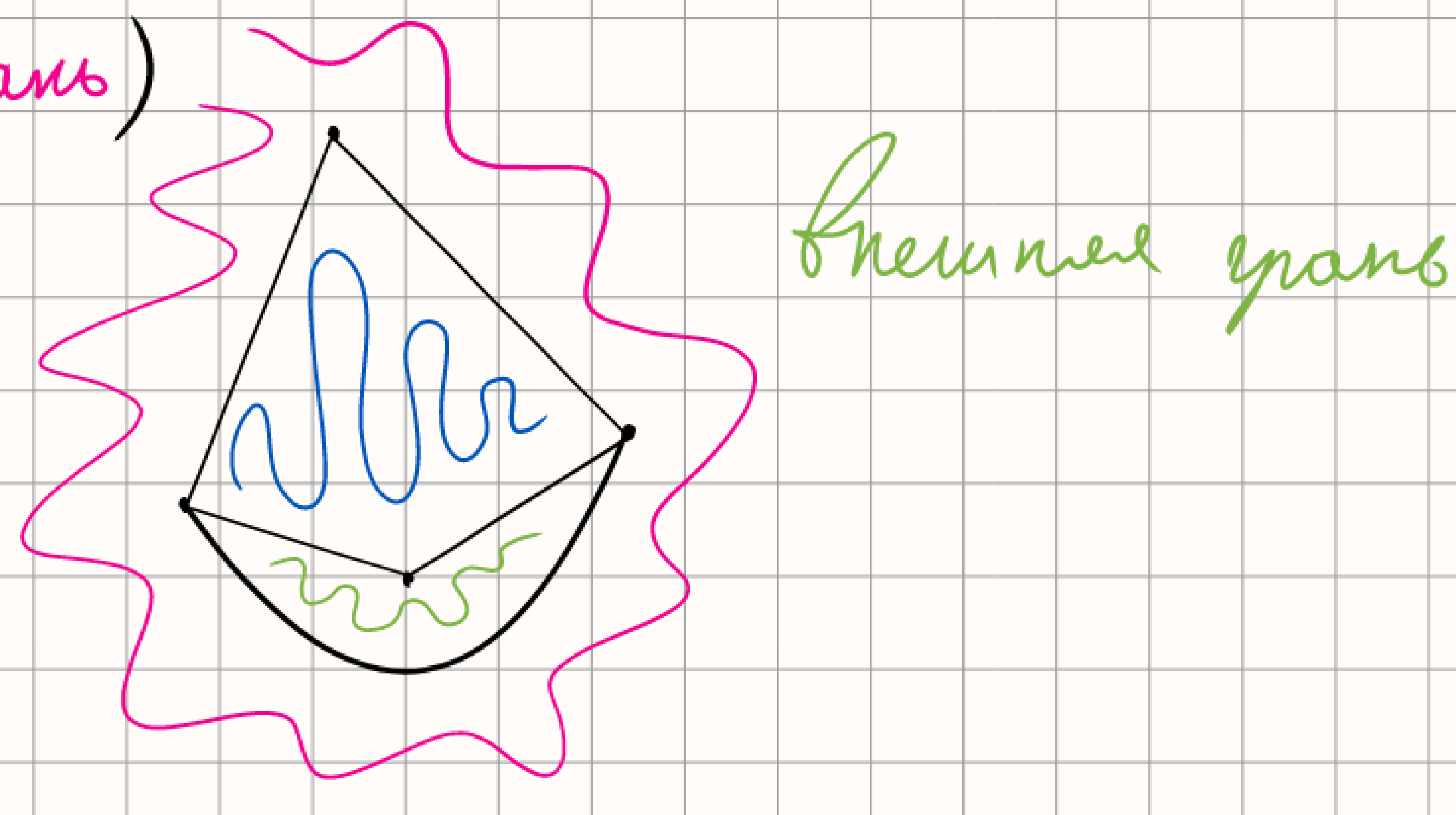
Опр $\exists$ задан <u>некоторый неориентированный</u> граф $G=(V,E)$ и нек-ое пр-во. $\exists$ каждой вершине v_i графа сопоставлена некоторая точка a_i в пр-ве, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ а каждому ребру $e=(v_i, v_j)$ сопоставлена нек-ая непрерывная кривая L в пр-ве, соед-ая точки a_i и a_j и не прох-ая через другие точки a_k $(k \neq i, j)$. Тогда если кривые <u>не пересекаются</u> то задана геометрическая реализация



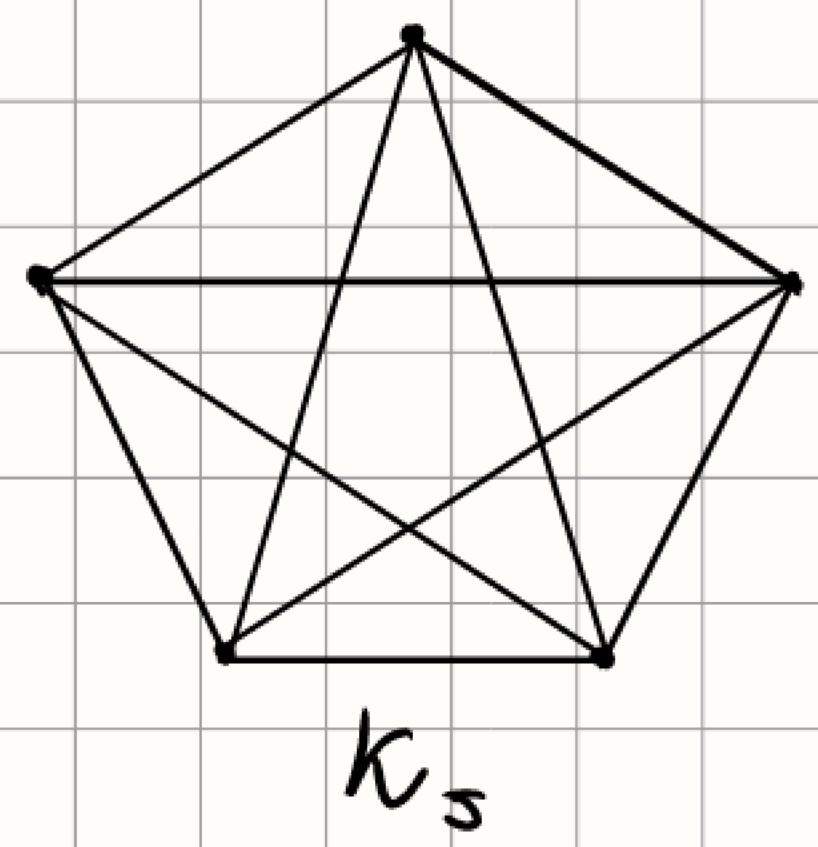


Опр Граф наз-ся планарным, если $\exists$ его геометрическая реализация на плоскости

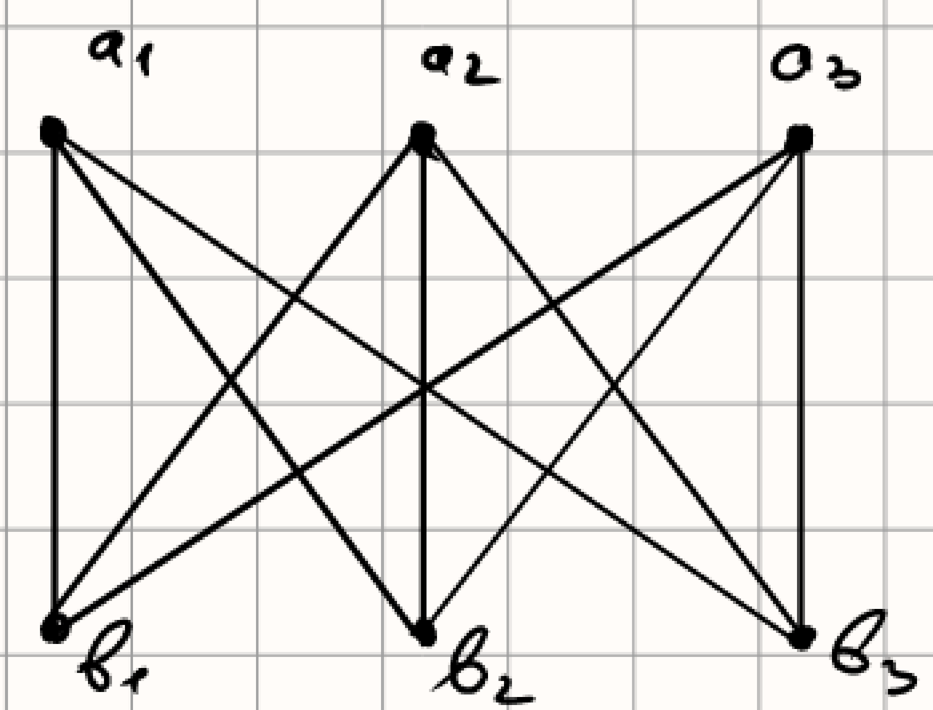
Опр Если имеется <u>планарная реализация</u> графа и мы разрежем плоскость по всем линиям планарной реализации, то плоскость распадётся на части, которые называются гранями этой планарной реализации (одна из граней <u>бесконечна</u> – внешняя грань)



Опр Графом K_5 наз. граф с 5-ю вершинами, в котором каждая пара вершин соединена ребром



Опр Графом 3,3 называется граф с 6-ю вершинами $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ в котором каждая вершина a_i соединена ребром с каждой вершиной b_j и других рёбер нет.



Опр Подразделением ребра (a, b) наз. операция, состоящая в след. действиях

1) удаление (a, b)
2) добавление новой вершины c
3) добавление рёбер (a, c) и (c, d)

В геомет. реализации равносильно добавлению точки (вершины с степени 2) на линии, изображающей ребро (a, b)

Опр Граф H называется подразделением графа G, если H можно получить из G путём конечного числа подразделений его рёбер

Опр 2 графа наз-ся гомоморфными, если $\exists$ их подразделения которые изоморфны

Опр $\exists$ есть некоторое мн-во $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ - мн-во цветов. Тогда раскраской графа $G = (V, E)$ (вершинной) наз. $\forall$ отобр-ие $\varphi : V \to C$ (вершина окрашивается в нек-ый цвет)

Раскарска наз-ся правильной, если в каждой паре смежных вершин окрашены в разные цвета

Утверждение 2.1.1 В $\forall$ графе (псевдографе) справедливо след. соотношение: $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$, где p - число вершин, а q - число ребер.

Утверждение 2.1.2 $\exists$ в графе $G=(V,E)$ имеются 2 различные вершины $v_1 \neq v_2$ и $\exists$ P - путь из v_1 в v_2. Тогда в P можно выделить подпуть из v_1 в v_2, явл. простой цепью.

Лемма 2.2.1 Если граф $G=(V,E)$ связный и ребро (a,b) содержится в некотором цикле в графе G, то при выбрасывании из графа G ребра (a,b) снова получится связный граф.

Т. 2.2.1 $\forall$ связный граф G содержит хотя-бы одно остовное дерево.

Лемма 2.2.2 Если к связному графу добавить новое ребро на тех же вершинах, то появится цикл.

Лемма 2.2.3 $\exists$ в графе $G=(V,E)$ имеется ровно p вершин и q ребер. Тогда в G не менее $p-q$ связных компонент

Т 2.22 (о различных определениях дерева)

Следующие 5 опр эквивалентны (p-вершин, q-ребра)

1) G - дерево
2) G - граф без циклов и $q=p-1$
3) G - связный граф и $q=p-1$
4) G - связный граф, но при удалении $\forall$ ребра становится несвязным
5) G - граф без циклов, но при добавлении $\forall$ ребра на тех же вершинах появляется цикл

Утверждение 2.3.1 Если в графе с p вершинами число ребер $q<p-1$ то граф не связный

Утверждение 2.3.2 Если в графе G нет циклов и $q=p-1$, то G - дерево

Утверждение 2.3.3 В любом дереве $q=p-1$

Утверждение 2.3.4 Если к дереву добавить новое ребро на тех же вершинах, то образуется цикл

Утверждение 2.3.5 Если в связном графе выбросить ребро из цикла, то полученный граф останется связным

Алгоритм Краскала

1. Выбрать в графе G $\forall$ ребро e_1 мин-го веса
2. Рекурсивный шаг: $\exists$ уже выбраны ребра $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Если $m = p-1$, то остановиться. Выдать ответ: ребра $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$ вместе со всеми p вершинами образуют кратчайшее остовое дерево в G. Если $m < p-1$, то среди всех ребер графа G, не образующих циклов с $e_1, e_2, \ldots, e_m$, взять ребро e_{m+1} мин. веса, и повторить 2.

Th 23.1 Описанный алгоритм для $\forall$ связного графа G строит кратчайшее остовное дерево

Th 24.1 Число упорядоченных корневых деревьев с q ребрами не превосходит 4^q

Следствие Число неизоморфных корневых деревьев с q ребрами и число неизоморфных деревьев с q ребрами не превосходит 4^q

Th 2.6.1 (формула Эйлера) Для $\forall$ планарной реализации <u>связного</u> планарного графа $G=(V,E)$ с p вершинами, q ребрами и r гранями выполняется $p-q+r=2$

Следствие Формула Эйлера справедлива и для геометрической реализации связных графов на сфере

Следствие Для $\forall$ выпуклого многогранника справедливо $p-q+r=2$

Th 2.7.1 Граф K_5 не планарен

Th 2.7.2 Граф $K_{3,3}$ не планарен

Th 2.7.3 (Понтрягина-Куратовского)
Граф планарен $\Leftrightarrow$ не содержит ни одного подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$

Th 2.8.1 (Кенига) Вершины графа G можно правильно раскрасить в 2 цвета $\Leftrightarrow$ в G нет простых циклов нечетной длины

Лемма 2.8.1 Если в графе G нет простых циклов нечетной длины, то $\forall$ замкнутый путь в G имеет четную длину

Лемма 28.2

$\exists$ в связном графе G нет простых циклов нечетной длины, и $\exists$ v, v' – 2 вершины графа G. Тогда либо все пути из v и v' имеют четную длину, либо все пути из v в v' имеют нечетную длину.

Лемма 29.1 Для $\forall$ геометрической реализации на плоскости связного планарного графа вып. равенство $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q$ (q_i – число сторон в i-й грани)

Th 29.1 $\exists$ $G=(V,E)$ – связный планарный граф, отличный от дерева, с $p \geq 3$ вершинами и q ребрами. Тогда если в G нет циклов длины меньше k, где $k \geq 3$, то $q \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$

Следствие В $\forall$ связном планарном графе $G=(V,E)$ без петель и кратных ребер с $p \geq 3$ вершинами и q ребрами справедливо нер-во

$$q \leq 3(p-2)$$

Лемма 292 В планарном графе (без петель и кратных ребер) $\exists$ вершина v, для которой $\deg v \le 5$

Th 292 Достаточно 5 цветов, чтобы правильно раскрасить вершины $\forall$ планарного графа

Опр Пусть $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ - исходный алфавит, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ - кодирующий алфавит. Через A^* и B^* будем обозначать мн-ва всех конечных слов в алфавитах A и B соотв-но

Кодированием из A в B будем наз-ть произвольное отображение $A^* \to B^*$. Частным случаем яв-ся алфавитное кодирование $A^* \to B^*$, которое задается отображением $\varphi : A \to B^*$, где для каждого i $\varphi(\alpha_i) = B_i \in B^*$

При этом слова из A^* кодируются побуквенно, то есть

$$\varphi(\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_s}) = B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{r}$$

код (кодовое слово)

Опр Кодирование $\varphi : A^* \to B^*$ наз-ся взаимнооднозначным (декодируемым, разделимым), если для $\forall$ 2 различных слов $\bar{\alpha}_1 \in A^*$ и $\bar{\alpha}_2 \in A^*$ выполняется $\varphi(\bar{\alpha}_1) \neq \varphi(\bar{\alpha}_2)$.

Опр Алфавитный код наз-ся равномерным, если длины всех его кодовых слов одинаковы

Опр Алфавитный код наз-ся префиксным если никакое кодовое слово не яв-ся началом другого кодового слова

Опр Алфавитный код наз постфиксным (суффиксным) если никакое слово не является концом другого.

Опр Пусть для всех букв $a_1, a_2, \dots, a_k$ исходного алфавита A заданы положительные частоты $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Пусть $\varphi: A \to \{0,1\}^*$ — <u>алфавитное кодирование</u>.

<u>Ценой кодирования</u> φ (при заданных частотах) наз-ся ф-ия $c(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} p_i l_i$, где l_i — длина i-го кодового слова, соответствующего букве α_i

Опр Пусть для всех букв $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ исходного алфавита A заданы и зафиксированы положительные частоты $p_1, p_2, \dots, p_k$

Взаимно однозначное кодирование $\varphi: A \to \{0,1\}^*$ наз-ся <u>оптимальным для этих частот</u>, если на нем достигается $\inf c(\varphi)$, где точная нижняя грань берется по всем взаимно однозначным кодированиям $\varphi: A \to \{0,1\}^*$

Опр Равномерный код в алфавите $\{0,1\}$ наз <u>исправляющим r ошибок</u>, если при наличии в $\forall$ кодовом слове не более r ошибок типа замещения можно однозначно восстановить исходное кодовое слово

Опр <u>Расстоянием Хэмминга $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$</u> между двумя наборами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ длины n наз число разрядов, в которых эти наборы различаются

Оп Шаром радиуса r с центром в точке $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ наз. мн-во всех наборов длины n, расстояние от которых до $\tilde{\alpha}$ не превосходит r

Оп Кодовым расстоянием $\rho_{min}(K)$ кода K наз. расстояние Хэмминга $\rho_{min} = \min \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где минимум берется по всем парам различных кодовых слов из K

Оп Равномерный код обнаруживает r ошибок, если при наличии в $\forall$ кодовом слове не более r ошибок типа замещения можно сказать, были ошибки или их не было.

Оп Через $S_r(n)$ обозначим число точек (наборов длины n) в шаре радиуса r

Оп Опр-им ф-ию $M_r(n)$ – максимальное возможное число слов длины n (в алфавите $\{0,1\}$) образующих код исправляющий r ошибок

Оп Кодом Хэмминга порядка n называется мн-во наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ из E_2^n, удовлетворяющих системе уравнений (сумма по модулю 2)

$$\begin{cases} \sum_{j \in D_0} \alpha_j = 0 \\ \sum_{j \in D_1} \alpha_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j \in D_{k-1}} \alpha_j = 0 \end{cases}$$

$D_i = \{ m \mid m = (m_{k-1} m_{k-2} \dots m_1 m_0)_2$ и при этом $m_i = 1 \}$

П/р: $D_0 = \{1, 3, 5, \dots\}$ $D_1 = \{2, 3, 6, 7, \dots\}$

Опр Линейным (двоичным) кодом длины n и ранга k наз. $\forall$ k-мерное лин. подпр-во в E_2^n

Опр Весом набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ наз число единиц в $\tilde{\alpha}$. Вес набора $\tilde{\alpha}$ будем обозначать $\omega(\tilde{\alpha})$

Утверждение 3.11

$\forall$ равномерный код яв-ся взаимно однозначным

Утверждение 3.12

$\forall$ префиксное кодирование яв-ся взаимно однозначным

Утверждение 3.13 $\forall$ постфиксное кодирование яв-ся взаимно однозначным

Th 3.11 $\exists\ \varphi : \alpha_i \to B_i\ (i = 1, 2, \dots, r)$ — некоторое алфавитное кодирование и G_φ — построенный по нему описанным способом ориентированный граф. Тогда кодирование φ взаимно однозначно $\Leftrightarrow$ в G_φ нет ориентированного цикла, проходящего через вершину $\beta_0 = \lambda$ (петли нет)

Т. 3.1.2 (Марков А.А.) Пусть $\varphi: a_i \to B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ – некоторое алфавитное кодирование. Пусть l_i – длина слова B_i и $L = \sum_{i=1}^{r} l_i$. Рассмотрим всевозможные представления вида

$$B_j = C_1 B_{j_1} \ldots B_{j_k} C_2,$$ где $B_j, B_{j_1} \ldots B_{j_k}$ – кодовые слова, а C_1 и C_2 – произвольные слова (возможно пустые).

Пусть W – максимальное значение k, то есть максимальное число кодовых слов, которые „помещаются" подряд внутри кодового слова. Тогда если кодирование φ не взаимно однозначно, то $\exists$ 2 различных слова $a' \in A^*$, $a'' \in A^*$ такие, что $\varphi(a') = \varphi(a'')$ и

$$\text{длина}(a') \le \left\lfloor \frac{(W+1)(L-r+2)}{2} \right\rfloor$$

$$\text{длина}(a'') \le \left\lfloor \frac{(W+1)(L-r+2)}{2} \right\rfloor$$

Т. 3.2.1 (неравенство Макмиллана)

Пусть задано алфавитное кодирование $\varphi: a_i \to B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, l_i – длина слова B_i и пусть в кодирующем алфавите B q букв. Тогда если φ взаимно однозначное кодирование, то

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q^{l_i}} \le 1$$

Лемма 3.2.1 Для всех k выполняется $c_k \le q^k$

Т 33.1 Если в алфавите B q букв и натуральные числа $l_1, l_2, \dots, l_r$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q^{l_i}} \leq 1$$

то ∃ префиксный код $B_1, B_2, \dots, B_r$ в алфавите B такой, что

$$\text{длина}(B_i) = l_i \qquad (i = \overline{1, r})$$

Следствие Если в некотором алфавите B ∃ взаимно однозначное алфавитное кодирование с длинами кодовых слов $l_1, l_2, \dots, l_r$, то в B ∃ префиксный код с теми же длинами кодовых слов.

Утверждение 34.1 Для ∀ набора частот $p_1, p_2, \dots, p_k$ (при $k \geq 2$) ∃ оптимальный код с ценой не более $\lceil \log_2 k \rceil$

Утверждение 34.2 Для ∀ набора частот $p_1, p_2, \dots, p_k$ ∃ оптимальный префиксный код

Лемма 34.1 Если φ — оптимальное кодирование и $p_i > p_j$, то для соотв-их этим частотам длин кодовых слов выполняется $l_i \leq l_j$

Лемма 3.4.2 Если φ – оптимальное префиксное кодирование и $l_{max} = \max\limits_{1 \le i \le k} l_i$, длина $(B_j) = l_{max}$, $B_j = B_j' \alpha$, где $\alpha \in [0,1]$, то в коде φ $\exists$ слово B_r такое, что $B_r = B_j' \bar{\alpha}$

Лемма 3.4.3 Е φ – оптимальное префиксное кодирование и $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_{k-1} \ge p_k$, то можно так переставить слова в коде φ, что получится слова оптимальное префиксное кодирование φ' в котором слова B'_{k-1} и B'_k будут различаться только в последнем разряде

Лемма 3.4.4 Расм 2 кодирования (исх. алфавит не важен, поэтому мы указываем только частоты и соответствующие кодовые слова)

$$\varphi: \begin{array}{l} p_1, p_2, \ldots, p_k \\ B_1, B_2, \ldots, B_k \end{array} \qquad \varphi': \begin{array}{l} p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, \ p', \ p'' \\ B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, \ B_k0, B_k1 \end{array}$$

где $p' + p'' = p_k$. Если один из этих кодов префиксный, то второй также префиксный и

$$c(\varphi') = c(\varphi) + p_k$$

Т/м 35.1 (теорема редукции)

∃ заданы 2 набора частот и 2 соответствующих им кодирования ($p' + p'' = p_k$)

φ: $\begin{matrix} p_1, p_2, \ldots p_k \\ B_1, B_2, \ldots B_k \end{matrix}$ $\qquad$ φ' $\begin{matrix} p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p', p'' \\ B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k0, B_k1 \end{matrix}$

1) Тогда если φ' – оптимальное префиксное кодирование то и φ – оптимальное префиксное кодирование

2) Если же φ – оптимальное префиксное кодирование и $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_{k-1} \geq p' \geq p''$, то φ' – также оптимальное префиксное кодирование

Утверждение 36.1 Равномерный код $K = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_m\}$ исправляет r ошибок $\Leftrightarrow \rho_{min}(K) \geq 2r+1$

Утверждение 36.2 Равномерный код обнаруживает r ошибок $\Leftrightarrow \rho_{min}(K) \geq r+1$

Утверждение 36.3 $S_r(n) = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{r}$
(в скобках число сочетаний из n эл-ов по k, $k = \overline{1,r}$)

Т/м 36.1 $\dfrac{2^n}{S_{2r}(n)} \leq M_r(n) \leq \dfrac{2^n}{S_r(n)}$

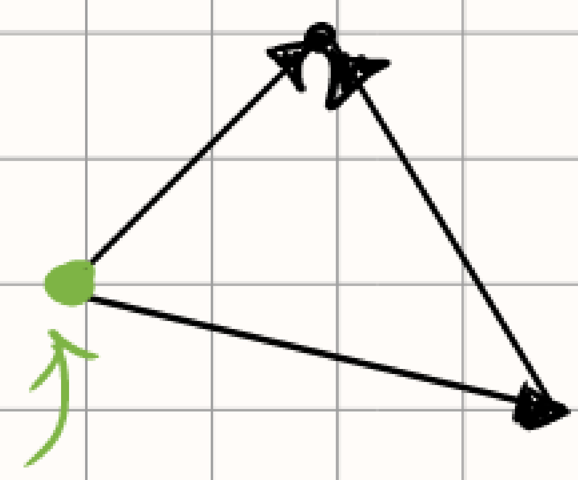
Т/м 37.1 Код Хэмминга порядка n содержит 2^{n-k} наборов, где $k = [\log_2 n] + 1$, и исправляет одну ошибку

Утверждение 37.1 $(\delta_{k-1}, \delta_{k-2}, \ldots \delta_1 \delta_0) = d$

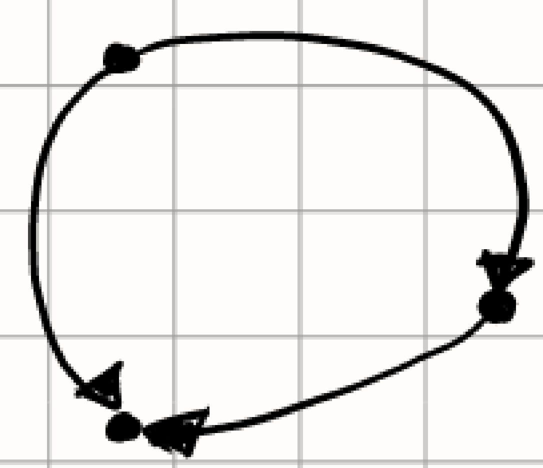
Т/м 37.2 $\frac{2^n}{2n} \le M_1(n) \le \frac{2^n}{n+1}$

Т/м 38.1 $\exists\ K \subseteq E_2^n$ — лин. код и $\rho_{min}(K)$ — его кодовое расстояние. Тогда $\rho_{min}(K) = \omega_{min}(K)$

Опр Вершины ориентированного графа (орграфа), в которые не входит ни одной дуги, называются *истоками*



Опр Орграф наз. *ацикличеким*, если в нём нет ориентированных циклов



Опр В ациклическом орграфе *глубиной вершины* v наз. макс. число дуг, которое может быть в ориентированном пути из какого-нибудь истока в вершину v

Опр Систему $Б = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, где все f_i — ф-ии АЛ будем наз. *базисом функциональных элементов*

Опр **Схемой из функциональных** эл-ов в базисе Б наз. ацикличеcкий орграф, в котором:

1) Каждому истоку приписана нек-ая переменная причем разным истокам приписаны разные переменные (истоки – **входы схем**, приписанные им переменные – **входные переменные**)

2) Каждой вершине, в которую входят $k \geq 1$ дуг приписана ф-ия из базиса Б, зависящая от k переменных и переменные поставлены во взаимно однозначное соответствие с k дугами, входящими в вершину (вершина с приписанной ф-ей при этом наз-ся **функциональным элементом**)

3) Некоторые вершины выделены как выходы (истоки одновременно могут явл. выходами)

Опр Индукцией по глубине q вершины v опр-ся ф-ия f_v реализуемая в данной вершине

Если $q=0$ то есть v - исток, и вершине v приписана переменная x_i, то $f_v \equiv x_i$. Пусть реализуемые ф-ии уже опр-ны для всех вершин глубины $< q_0$ и глубина $v = q_0$

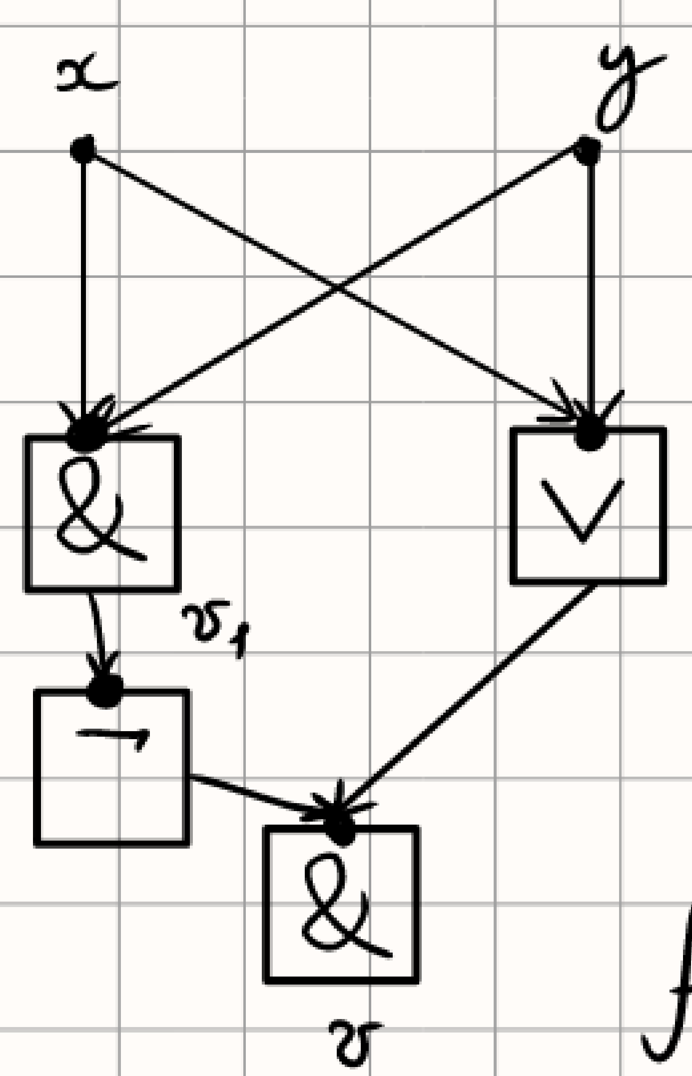
Пусть в v входят дуги $e_1, e_2, \dots, e_k$ из вершин $v_1, v_2, \dots, v_k$

Тогда глубина вершин $v_1, v_2, \dots, v_k <$ глубины v

и по предположению индукции в них реализуются некоторые ф-ии $f_1, f_2, \dots, f_k$. Пусть вершине v приписана ф-ия $g(x_1, \dots, x_k)$ и каждой её переменной x_j сопоставлена дуга e_j. Тогда по опр-ю в v реализуется ф-ия $f_v = g(f_1, f_2, \dots, f_k)$

Опр Будем говорить, что схема реализует систему ф-ий реализуемых в её выходах

Опр Сложностью схемы из функциональных элементов наз-ся число функциональных элементов в схеме



полусумматор

v, v_1 - выходы

$f_{v_1} = xy$

$f_{v_0} = \overline{xy} \& (x \vee y) = x \oplus y$

Сложность: 4

Для набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ будем обозначать через $|\tilde{\alpha}|$ двоичное число, задаваемое этим набором

Оп **Сумматором S_n** порядка n наз. схема с $2n$ входами $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ и $n+1$ выходом $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, такая, что для любых входов выполняется $|\tilde{z}| = |\tilde{x}| + |\tilde{y}|$

Оп **Вычитателем W_n** порядка n наз-ся схема с $2n$ входами $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ и n выходами $z_1, z_2, \ldots, z_n$ такая, что для $\forall$ входов, удовл-их условию $|\tilde{x}| \geq |\tilde{y}|$, выполняется $|\tilde{z}| = |\tilde{x}| - |\tilde{y}|$

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ — **входной алфавит**

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — **выходной алфавит**

A^∞ и B^∞ — **мн-ва всевозможных бесконечных последовательностей в алфавитах A и B** соответственно

Оп **Автоматом (инициальным)** наз-ся любая шестёрка (A, B, Q, G, F, q_0), где A, B, Q — **конечные алфавиты** (A — **входной алфавит**, B — **выходной алфавит**, Q — **мн-во состояний**) $G: A \times Q \to Q$ (G — **ф-ия переходов**) $F: A \times Q \to B$ (F — **ф-ия выхода**)

$q_0 \in Q$ — **начальное состояние**

Оп Отображение $\varphi: A^\infty \to B^\infty$ наз-ся **автоматной функцией**, если $\exists$ автомат, который реализует это отображение

Оп **Единичной задержкой** наз. автомат, в котором $A = B = Q = \{0,1\}$ и **система канонических уравнений** выглядит след. образом:

$$\begin{cases} z(t) = q(t-1) \\ q(t) = x(t) \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

$a(1)a(2)\ldots \to 0\,a(1)\,a(2)$

задерживает инф-ию на 1 такт времени

$x(t)$:		$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$\ldots$
$q(t)$:	0	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$\ldots$
$z(t)$:		0	$a(1)$	$a(2)$	$\ldots$

Оп **Диаграммой Мура** для автомата (A, B, Q, G, F, q_0) наз. ориентированный граф с мн-ом вершин Q, в котором каждой паре (a, q). Этой дуге приписывается пометка $(a, F(a,q))$. Особым образом помечена вершина, соответствующая начальному состоянию

Диаграмма Мура однозначно задаёт автомат

О.1 Схема из функциональных элементов и элемента задержки ((СФЭЗ) опр-ся в целом так же, как схема из функ. эл. (СФЭ) со след. отличиями

1) к функциональному базису добавлен эл. называемый задержкой

2) если в вершину входит ровно одна дуга, то этой вершине может быть приписана либо ф-ия базиса от одной переменной, либо задержкой

3) В СФЭЗ допускаются ориентированные циклы, но $\forall$ ор. цикл. должен проходить через задержку

Опр ∃ даны 2 автомата $(A_1, B_1, Q_1, G_1, F_1, q_0')$ и $(A_2, B_2, Q_2, G_2, F_2, q_0'')$ И ∃ задано отображение (кодирование) $K: A_1 \to A_2$ и $S: B_1 \to B_2$

сопост-ие разным эл. разные эл (не обяз. биект.)

∃ $P = a(1)a(2)\_\ a(t)\_$ – входная посл-ть 1 автомата. $K(P) = K(a(1))\_K(a(t))\_$ – код посл-ти P при кодировании K

$T = b(1)\_\ b(t)\_$ – выходная посл. 2 автомата

$S(T) = S(b(1))\_\ S(b(t))\_$ – код посл-ти T

Будем говорить, что 2 автомат моделирует 1 автомат при кодированиях K и S, если для ∀ вход. посл. P : если P преобр-ся в T, то $K(P)$ пре-ся в $S(T)$

Опр 2 состояния q_i и q_j автомата (A, B, Q, G, F) наз. отличимыми, если ∃ вход. слово $\bar{a} \in A^*$ такое, что $F(\bar{a}, q_i) \neq F(\bar{a}, q_j)$ (выходные слова разные) При этом слово $\bar{a}$ наз. экспериментом, а $l(\bar{a})$ – длина эксперимента

A^* – мн-во всех конечн. слов в алфавите A

Опр Умножителем M_n порядка n наз. схема $2n$ входами $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и $2n$ выходами $z_1, \ldots, z_{2n}$ такая, что $|\tilde{z}| = |\tilde{x}||\tilde{y}|$, где $|\tilde{z}| = (z_1 \ldots z_{2n})_2$, $|\tilde{x}| = (x_1 \ldots x_n)_2$, $|\tilde{y}| = (y_1 \ldots y_n)_2$

Утверждение 4.1.1 В $\forall$ ациклическом (конечном) орграфе для $\forall$ вершины v есть хотя бы один ориентированный путь в эту вершину из некоторого истока.

Утверждение 4.1.2 Если в ациклическом орграфе есть дуга (v_1, v_2), то глубина v_2 больше глубины v_1

Th 4.2.1 $\exists$ схемный сумматор порядка n в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$ с числом элементов $9n-5$

Th 4.2.2 $\exists$ схемный вычитатель порядка n в базисе $\{x \vee y, x \& y, \bar{x}\}$ с числом эл-ов $11n-5$

Th 5.2.1 Схема из СФЭЗ с n входами и m выходами осуществляет автоматное отображение из $(E_2^n)^\infty$ в $(E_2^m)^\infty$

Th 5.3.1 Для $\forall$ автоматной ф-ии $\exists$ модел-ая её СФЭЗ в базисе из функ-ых эл. дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и эл. задержки

Th 5.4.1 (Теорема Мура) Если в автомате (A, B, Q, G, F) состояния q_i, q_j отличимы и $|Q| = r$, то $\exists$ эксперимент $\bar{a}$, отличающий q_i и q_j длины $l(\bar{a}) \le r-1$

Лемма 5.4.1 $\exists$ в автомате (A, B, Q, G, F) есть 2 состояния q_u и q_v, отличимые экспериментом длины p и не отличимые более коротким эксп-ом. Тогда для $\forall k$, где $1 \le k \le p$ $\exists$ 2 состояния отличимые экспериментом длины k и не отличимые более коротким экспериментом

Лемма 4.3.1 Умножитель порядка n при n четном можно построить используя 3 умножит-ля порядка $\frac{n}{2}$ и дополнительные функ. эл. в кол-ве не более cn, где c — const, не завис от n

Лемма 4.3.2 Умножитель порядка $m+1$ можно построить, используя 1 умножитель порядка m и дополнительные функциональные эл. в кол-ве не более $c_1 n$, где c_1 — const, не завис. от m

Th 4.3.1 $M(n) = O(n^{\log_2 3})$